

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И
НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ДНЕПРОВСКАЯ ПОЛИТЕХНИКА»**

МЕХАНИКА РАЗУЩЕНИЯ

**Методические указания к самостоятельной работе
соискателей степени магистра специальности 132
«Материаловедение»**

**ДНЕПР - 2018
НТУ
Днепровская политехника**

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Механика разрушения» – составная часть науки о прочности твердого тела – занимается изучением законов разделения твердых тел на части под действием внешних сил и других факторов. Имеет своей целью подготовить будущего специалиста к решению инженерных задач механики разрушения, связанных с расчётом конструкций на прочность при наличии в них трещин.

Важной задачей при изучении данного курса является самостоятельная работа студентов. Особую актуальность это приобретает для студентов заочной формы обучения, где предполагается в большей степени, самостоятельное изучение курса. В этой связи, возникает потребность в учебных руководствах, облегчающих самостоятельное решение практических задач.

В пособии представлены контрольные задания с указанием порядка их выполнения для студентов заочной формы обучения и даны примеры решения задач.

Основная цель данного пособия – помочь студенту приобрести навыки в решении задач по основам механики разрушения. Пособие предназначается главным образом для студентов-заочников, но может быть также полезным и для студентов очного обучения.

1. Порядок выполнения контрольных работ

Контрольная работа состоит из двух задач по темам:

- 1) вычисление допускаемой нагрузки (усилий, напряжений), действующих в элементах конструкций с трещинами;
- 2) расчет критической длины трещины в элементах металлоконструкций;
- 3) расчет циклической долговечности элемента конструкции с трещиной.

Вариант контрольной работы выдаётся на установочной лекции. Изучение теории и выполнение контрольной работы производится в течение нескольких месяцев перед сессией, согласно графику учебного процесса.

Данные для решения задач следует выбирать из таблиц, указанных в условии задачи, в соответствии с номером зачетной книжки и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например, следующим образом:

6 – 2 – 6 – 2 – 6 – 2
а б в г д е

Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу определённой буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 2.1 обозначены буквами е, д, г, в, б. В соответствии с шифром 6-2-6-2-6-2, буквы е, г, б имеют номер 2, а буквы д, в – номер 6, поэтому студент должен взять данные в столбцах е, г, б по строке номер 2, а в столбцах д, в – по строке номер 6.

В заголовке контрольной работы должны быть чётко написаны: название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента (полностью), название факультета (института), специальности, и учебный шифр.

Перед решением каждой задачи надо выписать полностью её условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз и указать на нём в числах все величины, необходимые для расчёта.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов объяснениями.

Необходимо указывать размерность всех величин и подчёркивать окончательные результаты.

Не следует вычислять большое количество значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности.

Не допускается электронный вариант оформления контрольной работы, все расчеты должны быть оформлены в рукописном виде.

2. Задачи для самостоятельной работы

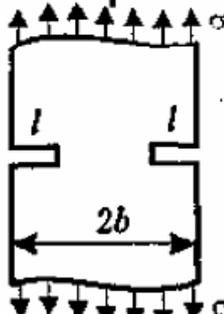
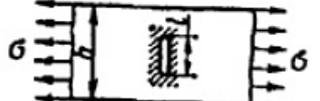
Задача № 1

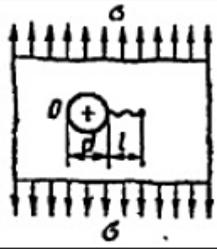
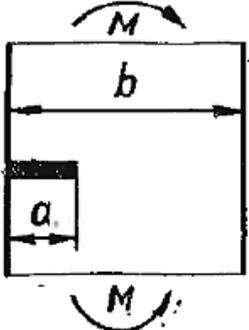
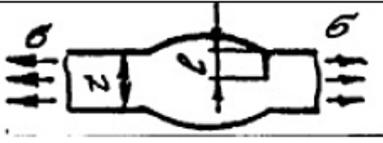
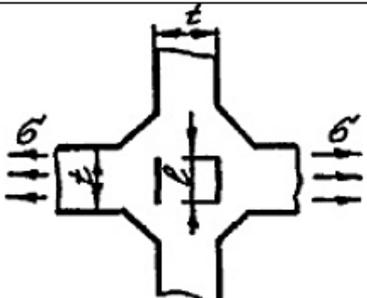
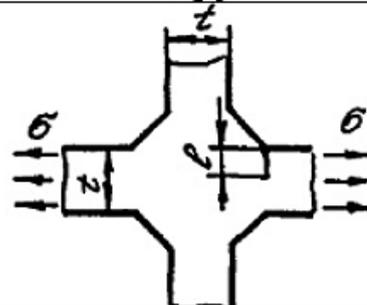
В элементе конструкции (табл. 1) расположена трещина. Известны геометрические размеры элемента конструкции и трещины, параметры трещиностойкости материала конструкции. Найти допускаемую нагрузку (напряжение). Исходные данные взять из таблицы 2.1, 2.2.

Задача № 2

В элементе конструкции (табл. 1) расположена трещина. Элемент конструкции подвергается циклическому нагружению (цикл отнулевой). Известны геометрические размеры элемента конструкции и трещины, параметры трещиностойкости материала конструкции, максимальное значение нагрузки (напряжения) в цикле нагружения. Найти: 1) критическую длину усталостной трещины (при решении нелинейного уравнения применять метод хорд, максимальное число приближений равно трём); 2) циклическую долговечность элемента конструкции (при интегрировании формулы Пэриса использовать метод средних прямоугольников, число узлов равно четырем). Исходные данные взять таблицы 2.1, 2.2.

Таблица 1

№ расчетной схемы	Расчетная схема и формулы для вычисления коэффициента интенсивности напряжений	
1		$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot Y$ $Y = \left[\frac{2b}{\pi l} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2b} + 0,1 \sin \frac{\pi l}{b} \right) \right]^{1/2}$
2		$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot \frac{1,11 + 5(l/h)^4}{1 - l/h}$
3		$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \operatorname{sec} [\pi l / (2h)]$

4		$K_I = 0,59\sigma_0\sqrt{d}$ $\sigma_0/\sigma = 3 + 2,115\sqrt{(d+l)/d}$
5		$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} \cdot Y,$ $Y = [1,12 - 1,40 \times \left(\frac{a}{b}\right) + 7,33 \times$ $\times \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13,08 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 14 \left(\frac{a}{b}\right)^4],$ $\sigma = \frac{6M}{tb^2}$
6		$K_I = \sigma\sqrt{t} \times [-0,364 - 6,171(l/t) -$ $+ 33,17(l/t)^2 - 125,4(l/t)^3 +$ $+ 162,8(l/t)^4]$
7		$K_I = \sigma\sqrt{t} \times [0,784 + 0,966(l/t) -$ $- 1,225(l/t)^2 + 1,067(l/t)^3 +$ $+ 3,289(l/t)^4]$
8		$K_I = \sigma\sqrt{t} \times [0,549 + 3,725(l/t) -$ $- 15,73(l/t)^2 + 56,35(l/t)^3 -$ $- 56,46(l/t)^4]$

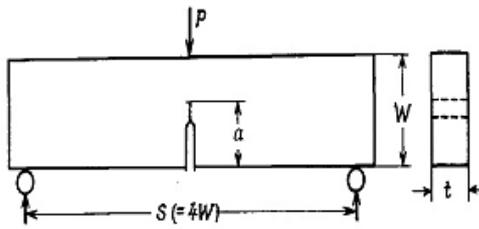
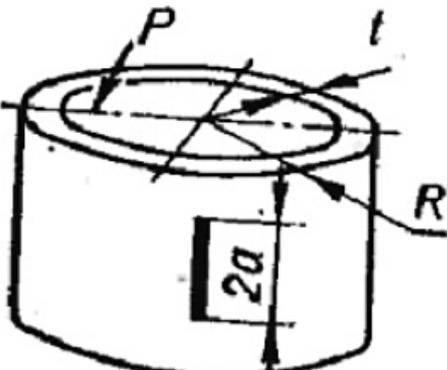
9		$\alpha = a/W,$ $K_I = \frac{3SP}{2tW^2} \sqrt{\pi a} \cdot Y(\alpha),$ $Y(\alpha) = \frac{1,99 - \alpha(1 - \alpha)}{(1 + 2\alpha)} \times$ $\times \frac{(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2)}{(1 - \alpha)^{3/2}}$
0		$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot Y,$ $Y = \sqrt{1 + 1,61 \frac{a^3}{Rt}},$ $\sigma = \sigma_0 = \frac{pR}{t}.$

Таблица 2.1. Исходные данные

№ Расчетной схемы	B, мм	l/B	h, мм	l/h	t, мм	l/t	W/t	b, мм	l/b	a/b	г, мм
1	100	0,45	550	0,025	10	0,45	1	550	0,025	0,025	7,5
2	150	0,4	500	0,05	15	0,4	2	500	0,05	0,05	10
3	200	0,35	450	0,1	20	0,35	3	450	0,1	0,1	12,5
4	250	0,3	400	0,15	25	0,3	4	400	0,15	0,15	15
5	300	0,25	350	0,2	25	0,25	5	350	0,2	0,2	17,5
6	350	0,2	300	0,25	20	0,2	5	300	0,25	0,25	20
7	400	0,15	250	0,3	15	0,15	4	250	0,3	0,3	22,5
8	450	0,1	200	0,35	10	0,1	3	200	0,35	0,35	25
9	500	0,05	150	0,4	10	0,05	2	150	0,4	0,4	27,5
0	550	0,025	100	0,45	15	0,025	1	100	0,45	0,45	30
е	Д	Г	В	б	а	е	Д	Г	В	б	а

Таблица 2.2. Исходные данные

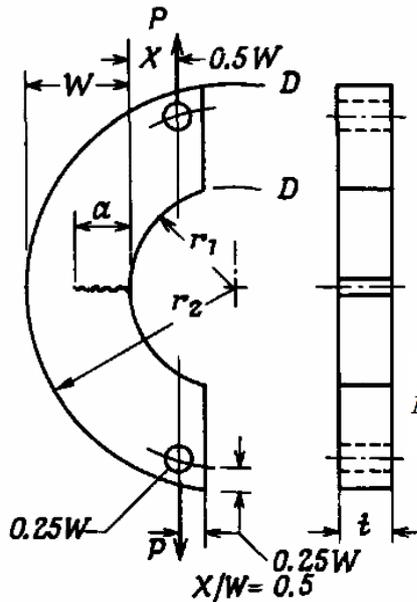
№ Расчетной схемы	d, мм	R, мм	R/t	a/R	P _{max} , МПа	σ _{max} , МПа	P _{max} , кН	M _{max} , кНм	C, м/цикл	K _c	n
1	60	120	0,05	0,09	300	15	15	60	1,6	100	3,4
2	55	110	0,06	0,09	333	20	20	55	1,1	110	3,6
3	50	100	0,07	0,08	357	25	25	50	1,2	120	3,5
4	45	90	0,08	0,08	375	30	30	45	1,4	130	3,4
5	40	80	0,09	0,07	389	35	35	40	1,8	140	3,6
6	35	70	0,09	0,07	444	40	40	35	0,89	150	3,4
7	30	60	0,08	0,06	563	45	45	30	0,60	160	3,3
8	25	50	0,07	0,06	714	50	50	25	1,1	170	3,3
9	20	40	0,06	0,05	917	55	55	20	1,1	180	3,5
0	15	30	0,05	0,05	1200	60	60	15	1,5	190	3,4
е	е	д	г	в	б	а	е	д	г	в	б

3. Пример выполнения контрольной работы

Задача № 1

В С-образном элементе конструкции (см. рис. 1) расположена трещина. Известны геометрические размеры элемента конструкции, трещины и параметры трещиностойкости материала: $\alpha=0,10$; $r_2=0,400$ м; $W=0,080$ м; $t=0,020$ м; критический коэффициент интенсивности напряжений $K_C=90\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$.

Найти допускаемую нагрузку.



Решение

Коэффициент интенсивности напряжений для трещины, расположенной в С-образном элементе конструкции, описывается выражениями [13]:

$$K = \frac{P}{tW^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot \frac{X}{W} + 1,9 + 1,1 \cdot \alpha \right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot (1 - \alpha)^2 \left[1 - \frac{r_1}{r_2} \right] \right] \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (1)$$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha)^{0,5}}{(1 - \alpha)^{1,5}} \cdot (3,74 - 6,30 \cdot \alpha + 6,32 \cdot \alpha^2 - 2,43 \cdot \alpha^3) \quad (2)$$

$$\alpha = a/W$$

Рис. 1

Для вычисления допускаемой нагрузки необходимо выразить из формулы (1) силу P:

$$P = \frac{K \cdot t \cdot W^{0,5}}{\left[3 \cdot \frac{X}{W} + 1,9 + 1,1 \cdot \alpha \right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot (1 - \alpha)^2 \left[1 - \frac{r_1}{r_2} \right] \right] \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)} \quad (3)$$

Учитывая, что разрушение начинается, когда $K=K_C$, а также, что $X/W=0,5$; $r_1=r_2-W$ получаем:

$$P_{\text{ДОП}} = \frac{K_C \cdot t \cdot W^{0,5}}{\left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \alpha \right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot (1 - \alpha)^2 \left[1 - \frac{r_2 - W}{r_2} \right] \right] \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)} \quad (4)$$

Подставляя исходные данные в формулы (2), (3) и (4), получаем допускаемую нагрузку:

$$f(0,10) = \frac{0,10^{0,5}}{(1-0,10)^{1,5}} \cdot (3,74 - 6,30 \cdot 0,10 + 6,32 \cdot 0,10^2 - 2,43 \cdot 0,10^3) = 1,17$$

$$P_{\text{доп}} = \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 0,020 \cdot 0,080^{0,5}}{[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot 0,10] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot (1 - 0,10)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400} \right] \right]} \cdot 1,17 = 120 \cdot 10^3 \text{ Н} = 120 \text{ кН}$$

Задача №2

В С-образном элементе конструкции (см. рис. 1) расположена трещина. Элемент конструкции подвергается циклическому нагружению (цикл отнулевой). Известны геометрические размеры элемента конструкции $r_2 = 0,400\text{м}$; $W = 0,080\text{м}$; $t = 0,020\text{м}$, начальный размер усталостной трещины $a_0 = 0,1$ (т.е. тот, который был определён неразрушающим методом контроля), циклическая трещиностойкость материала конструкции $K_{fc} = 90 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, максимальная сила цикла нагружения $P_{\text{max}} = 25 \text{ кН}$.

Найти: 1) критическую длину усталостной трещины; 2) циклическую долговечность элемента конструкции. Параметры в уравнении Пэриса: $n = 3,0$;

$$C = 1,2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}}{\text{цикл}} \frac{1}{[\text{МПа}\sqrt{\text{м}}]^n}$$

Решение

1) Коэффициент интенсивности напряжений для трещины, расположенной в С-образном элементе конструкции, описывается выражениями (1) и (2). Условием усталостного разрушения тела, содержащего макроскопическую трещину, является неравенство:

$$K_{\text{max}} \geq K_{fc} \quad (5)$$

где K_{max} – максимальный КИН цикла нагружения.

Учитывая формулы (1), (2) и (5) а также, что в формулах $X/W = 0,5$; $r_1 = r_2 - W$; $P = P_{\text{max}}$, $K = K_{\text{max}}$, $a = a_{\text{кр}}$ получаем уравнение:

$$\frac{P_{\text{max}}}{tW^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{a}{W} \right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{a}{W} \right)^2 \left[1 - \frac{r_2 - W}{r_2} \right] \right] \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) - K_{fc} = 0 \quad (6)$$

$$\text{где } f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(\frac{a}{W}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{a}{W} + 6,32 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3 \right)$$

В этом нелинейном уравнении известны все параметры, кроме длины усталостной трещины a , которая является аргументом уравнения. Корнем уравнения является критическая длина усталостной трещины $a_{кр}$. Нахождение корня этого уравнения аналитически очень сложно, поэтому воспользуемся численным методом – методом хорд.

Обозначим в виде $\Phi(a)$ выражение стоящее слева от знака равенства в формуле (6). Тогда итерационная формула метода хорд будет иметь вид:

$$a_{i+1} = a_i - \frac{\Phi(a_i) \cdot (a_{end} - a_i)}{\Phi(a_{end}) - \Phi(a_i)} \quad (7)$$

Очевидно, что функция $\Phi(a)$ при значениях аргумента меньших критической длины усталостной трещины $a_{кр}$ будет отрицательна. Положительные значения функции $\Phi(a_{кр})$ будут означать о необходимости прекращения приближения, так как аргумент этой функции будет больше критической длины усталостной трещины.

Приближения образуют возрастающую последовательность:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_i < a_{i+1} < \dots < a_{кр} < a_{end}$$

Первым членом этой последовательности является начальная длина усталостной трещины a_0 , так как критическая $a_{кр}$ не может быть меньше её. Последним $a_{end} = 95\%$ ширины элемента конструкции W , так как критическая длина $a_{кр}$ не может быть больше её.

Примечание: $a_{end} \neq W$, так как в противном случае расчёт будет невозможен.

Первое приближение ($i = 0$): $a_{end} = 0,95 \cdot 0,080 = 0,076$ м.

$$f\left(\frac{a_{end}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{0,076}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{0,076}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{0,076}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{0,076}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{0,076}{0,080}\right)^3\right) = 120$$

$$\Phi(a_{end}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{0,076}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{0,076}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 120 - 90 \cdot 10^6 = 2,27 \cdot 10^9 \text{ Па} \sqrt{\text{м}}$$

$$f\left(\frac{a_0}{W}\right) = \frac{\left(\frac{0,008}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{0,008}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{0,008}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{0,008}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{0,008}{0,080}\right)^3\right) = 1,17$$

$$\Phi(a_0) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{0,008}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{0,008}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,17 - 90 \cdot 10^3 = -7,11 \cdot 10^7 \text{ Па} \sqrt{\text{м}}$$

$$a_1 = a_0 - \frac{\Phi(a_0) \cdot (a_{\text{end}} - a_0)}{\Phi(a_{\text{end}}) - \Phi(a_0)}$$

$$a_1 = 0,008 - \frac{-7,11 \cdot 10^7 \cdot (0,076 - 0,008)}{2,27 \cdot 10^9 - (-7,11 \cdot 10^7)} = 0,0101 \text{ м}$$

Второе приближение (i = 1):

$$f\left(\frac{a_1}{W}\right) = \frac{\left(\frac{0,0101}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{0,0101}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{0,0101}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{0,0101}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{0,0101}{0,080}\right)^3\right) = 1,32$$

$$\Phi(a_1) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{0,0101}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{0,0101}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,32 - 90 \cdot 10^3 = -6,86 \cdot 10^7 \text{ Па} \sqrt{\text{м}}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{\Phi(a_1) \cdot (a_{\text{end}} - a_1)}{\Phi(a_{\text{end}}) - \Phi(a_1)}$$

$$a_2 = 0,0101 - \frac{-7,11 \cdot 10^7 \cdot (0,076 - 0,0101)}{2,27 \cdot 10^9 - (-6,86 \cdot 10^7)} = 0,012 \text{ м}$$

Третье приближение (i = 2):

$$f\left(\frac{a_2}{W}\right) = \frac{\left(\frac{0,0121}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{0,0121}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{0,0121}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{0,0121}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{0,0121}{0,080}\right)^3\right) = 1,45$$

$$\Phi(a_2) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{0,0121}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{0,0121}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,45 - 90 \cdot 10^3 = -6,63 \cdot 10^7 \text{ Па} \sqrt{\text{м}}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{\Phi(a_2) \cdot (a_{\text{end}} - a_2)}{\Phi(a_{\text{end}}) - \Phi(a_2)}$$

$$a_3 = 0,0121 - \frac{-6,63 \cdot 10^7 \cdot (0,076 - 0,0121)}{2,27 \cdot 10^9 - (-6,63 \cdot 10^7)} = 0,0139 \text{ м}$$

Итерационный процесс прекращаем. Проверяем, чтобы выполнялось условие $\Phi(a_3) < 0$:

$$f\left(\frac{a_3}{W}\right) = \frac{\left(\frac{0,0139}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{0,0139}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{0,0139}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{0,0139}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{0,0139}{0,080}\right)^3\right) = 1,57$$

$$\Phi(a_3) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{0,0139}{0,080}\right] \cdot$$

$$\times \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{0,0139}{0,080}\right)\right]^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right] \cdot 1,57 - 90 \cdot 10^3 = -6,42 \cdot 10^7 \text{ Па}\sqrt{\text{м}}$$

Условие $\Phi(a_3) < 0$ выполняется, поэтому принимаем $a_{кр} = a_3 = 0,0139\text{м} = 0,014\text{м} = 14\text{мм}$.

2) Циклическую долговечность можно найти из модифицированного уравнения Пэриса:

$$\frac{da}{dN} = CK^n.$$

Необходимо преобразовать это уравнение и проинтегрировать:

$$N_{кр} = \int_{a_0}^{a_{кр}} \frac{da}{CK^n}. \quad (8)$$

Границы интегрирования были выбраны a_0 , $a_{кр}$, так как усталостная трещина растёт от начальной до критической длины.

Определим интеграл (8) численно – методом средних прямоугольников. Сделаем замену: $F = \frac{1}{CK^n}$. Формула средних прямоугольников:

$$N_{кр} = h \sum_{j=1}^n F\left(a_j - \frac{h}{2}\right) \quad (9)$$

где n – число узлов сетки;

h – шаг сетки;

j – индекс узлов.

Равномерную сетку можно описать следующим образом:

$$a_j = a_0 + j \cdot h \quad h = \frac{a_{кр} - a_0}{n}$$

В нашем случае $n = 4$, следовательно:

$$h = \frac{0,014 - 0,008}{4} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Для $j=1$:

$$a_1 = 0,008 + 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_1 - \frac{h}{2}\right) = F\left(9,5 \cdot 10^{-3} - \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(8,75 \cdot 10^{-3})$$

$$f\left(\frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,23$$

$$K(8,75 \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{8,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,23 = 19,9 \cdot 10^6 \text{ Па} \sqrt{m} = 19,9 \text{ МПа} \sqrt{m}$$

Для $j=2$:

$$a_1 = 0,008 + 2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_2 - \frac{h}{2}\right) = F\left(11 \cdot 10^{-3} - \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(10,25 \cdot 10^{-3})$$

$$f\left(\frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,33$$

$$K(10,25 \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{10,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,33 = 21,6 \cdot 10^6 \text{ Па} \sqrt{m} = 21,6 \text{ МПа} \sqrt{m}$$

$$F(10,25 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-11} \cdot (21,6)^{3,0}} = 8,27 \cdot 10^6 \text{ цикл/м}$$

Для $j=3$:

$$a_3 = 0,008 + 3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_3 - \frac{h}{2}\right) = F\left(12,5 \cdot 10^{-3} - \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(11,75 \cdot 10^{-3})$$

$$+ f\left(\frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,43$$

$$K(11,75 \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{11,75 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,43 = 23,3 \cdot 10^6 \text{ Па} \sqrt{m} = 23,3 \text{ МПа} \sqrt{m}$$

$$F(11,75 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-11} \cdot (23,3)^{3,0}} = 6,59 \cdot 10^6 \text{цикл/м}$$

Для $j=4$:

$$a_4 = 0,008 + 4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_4 - \frac{h}{2}\right) = F\left(14 \cdot 10^{-3} - \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(13,25 \cdot 10^{-3})$$

$$f\left(\frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,53$$

$$K(13,25 \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{13,25 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,53 = 25,1 \cdot 10^6 \text{Па}\sqrt{\text{м}} = 25,1 \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$$

$$F(13,25 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-11} \cdot (25,1)^{3,0}} = 5,27 \cdot 10^6 \text{цикл/м}$$

Полученные значения подставляем в формулу (9):

$$N_{кр} = h \cdot \{F(8,75 \cdot 10^{-3}) + F(10,25 \cdot 10^{-3}) + F(11,75 \cdot 10^{-3}) + F(13,25 \cdot 10^{-3})\}$$

$$N_{кр} = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot \{0,6 \cdot 10^6 + 8,27 \cdot 10^6 + 6,59 \cdot 10^6 + 5,27 \cdot 10^6\} = 46,1 \cdot 10^3 \text{цикл}$$

Погрешность вычисления циклической долговечности вычисляется по формуле Рунге:

$$\Delta N_{кр} = \frac{1}{3} \left| N_{кр} - N_{кр}^* \right|$$

где $N_{кр}^*$ – циклическая долговечность, вычисленная при числе шагов в два раза меньшем, чем при расчёте $N_{кр}$.

Таким образом, необходимо провести вычисления при $n=2$:

$$h = \frac{0,014 - 0,008}{2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Для $j=1$:

$$a_1 = 0,008 + 1 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_1 - \frac{h}{2}\right) = F\left(11 \cdot 10^{-3} - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(9,5 \cdot 10^{-3})$$

$$f\left(\frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,28$$

$$K(9,5 \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,28 = 20,7 \cdot 10^6 \text{ Па} \sqrt{M} = 20,7 \text{ МПа} \sqrt{M}$$

$$F(9,5 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-11} \cdot (20,7)^{3,0}} = 9,40 \cdot 10^6 \text{ цикл/м}$$

Для j=2:

$$a_2 = 0,008 + 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F\left(a_2 - \frac{h}{2}\right) = F\left(14 \cdot 10^{-3} - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = F(12,5 \cdot 10^{-3})$$

$$f\left(\frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{W}\right) = \frac{\left(\frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{0,5}}{\left(1 - \frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^{1,5}} \cdot \left(3,74 - 6,30 \cdot \frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080} + 6,32 \cdot \left(\frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 - 2,43 \cdot \left(\frac{125 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^3\right) = 1,45$$

$$K(12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}) = \frac{25 \cdot 10^3}{0,020 \cdot 0,080^{0,5}} \cdot \left[3 \cdot 0,5 + 1,9 + 1,1 \cdot \frac{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right] \cdot \left[1 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0,080}\right)^2 \left[1 - \frac{0,400 - 0,080}{0,400}\right]\right] \cdot 1,45 = 23,7 \cdot 10^6 \text{ Па} \sqrt{M} = 23,7 \text{ МПа} \sqrt{M}$$

$$F(12,5 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-11} \cdot (23,7)^{3,0}} = 23,7 \cdot 10^6 \text{ цикл/м}$$

Полученные значения подставляем в формулу (9):

$$N_{кр}^* = h \cdot \{F(9,5 \cdot 10^{-3}) + F(12,5 \cdot 10^{-3})\}$$

$$N_{кр}^* = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \{9,40 \cdot 10^6 + 23,7 \cdot 10^6\} = 99,3 \cdot 10^3 \text{ цикл}$$

Тогда
$$\Delta_{N_{кр}} = \frac{1}{3} |46,1 \cdot 10^3 - 99,3 \cdot 10^3| = 17,7 \cdot 10^3 \text{ цикл}$$

В инженерной практике представляет интерес нижняя оценка долговечности (искомая величина):

$$N_{кр}^{ниж} = N_{кр} - \Delta_{N_{кр}}$$

$$N_{кр}^{ниж} = 46,1 \cdot 10^3 - 17,7 \cdot 10^3 = 28 \cdot 10^3 \text{ цикл}$$

Литература

1. Броек Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. –368 с.
2. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твёрдых тел. – М.: Металлургия, 1971. – 264 с.
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 255 с.
5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1968. – 246 с.
6. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. – М.:Наука, 1990, 240 с.
7. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985, 504с.
8. Разрушение (под ред. Г. Либовица), т. I—VII. – М.: Мир, 1973–1977.
9. Слепян Л.И. Механика трещин. – Л.: Судостроение, 1981. – 295 с.
10. Хеллан К. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
11. Херцберг Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов. – М.: Металлургия, 1989. – 576 с.
12. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974.–640 с.
13. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т.1,2. М.: Мир, 1990.